

**Решения заданий первого этапа
Всесибирской олимпиады школьников по математике**

11 класс

Все задачи оцениваются из 7 баллов. Каждое верное решение, вне зависимости от длины и степени красоты, оценивается в 7 баллов

11.1. Михаил выезжает из Бердска в Черепаново в 8:00 утра; В тот же день, в то же время и по той же дороге ему навстречу из Черепаново в Бердск выезжают Харитон и Николай. В 9:30 утра Харитон находился ровно на полпути между Михаилом и Николаем; в 10:00 утра Михаил находился ровно на полпути между Харитоном и Николаем. Определите, в какое время встретились Михаил и Харитон, и в какое время встретились Михаил и Николай, если все они двигались с постоянными скоростями?

Ответ. Михаил и Харитон встретились в 9:48 утра, Михаил и Николай - в 10:15 утра.

Решение. Обозначим за S расстояние между Бердском и Черепаново, и за x, y, z скорости Михаила, Харитона и Николая соответственно. Из того, что в 9:30 утра Харитон находился ровно на полпути между Михаилом и Николаем следует, что $y > z$ и

$(S - \frac{3}{2}y) - \frac{3}{2}x = \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z$, что равносильно $x + 2y - z = \frac{2}{3}S$. Из того, что в 10:00 утра

Михаил находился ровно на полпути между Харитоном и Николаем следует, $2x - (S - 2y) = S - 2x - 2z$, что равносильно $2x + y + z = S$.

Время, необходимое для встречи Михаила и Харитона, равно
$$\frac{S}{x+y} = \frac{3S}{(x+2y-z)+(2x+y+z)} = \frac{3S}{\frac{2S}{3}+S} = \frac{9S}{5S} = \frac{9}{5}$$
 часа, что равно 1 час 48 минут,

следовательно, произошла эта встреча в 9:48 утра.

Время, необходимое для встречи Михаила и Николая, равно
$$\frac{S}{x+z} = \frac{3S}{-(x+2y-z)+2(2x+y+z)} = \frac{3S}{-\frac{2S}{3}+2S} = \frac{9S}{4S} = \frac{9}{4}$$
 часа, что равно 2 часа 15 минут,

следовательно, произошла эта встреча в 10:15 утра.

Критерии оценивания. (●) Правильно составлена система уравнений для S, x, y, z : 3 балла. (●) Вычисление каждого из ответов: по 2 балла.

11.2. Найти все четвёрки действительных чисел (a, b, c, d) таких, что

$$a(b+c) = b(c+d) = c(d+a) = d(a+b).$$

Ответ. 8 бесконечных серий решений, получающихся умножением каждого из чисел $(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (1,1,1,1), (1,-1,1,-1), (1,-1 \pm \sqrt{2}, -1, 1 \mp \sqrt{2})$ на любое действительное число.

Решение. Вычитая первое выражение из третьего, получим $ab = cd$, вычитая четвёртое выражение из второго, получим $ad = bc$.

1. Если одно из переменных, скажем a , равно 0, то одно из c, d равно 0 и одно из b, c равно 0. В случае $c \neq 0$ будет $b = d = 0$ и тогда все четыре выражения в условии равны 0 и между собой. Если же $c = 0$, то $bd = 0$ и одно из b, d равно 0, то есть снова три из переменных равны 0. Аналогично, все четвёрки, в которых три переменных равны 0, а четвёртое произвольно, являются решениями задачи.

2. Далее все a, b, c, d не равны 0. Тогда, перемножив равенства $ab = cd$ и $ad = bc$ и сократив на db , получим $a^2 = c^2$, то есть $a = \pm c$. Обозначим $c = \varepsilon a, \varepsilon = \pm 1$, тогда и $d = \varepsilon b$. Подставим полученные выражения в равенства из условия, получим

$a(b + \varepsilon a) = b(\varepsilon a + \varepsilon b) = \varepsilon a(\varepsilon b + a) = \varepsilon b(a + b)$, из которых второе и третье следуют из первого $a(b + \varepsilon a) = b(\varepsilon a + \varepsilon b)$.

3. Если $\varepsilon = 1$, то $a^2 = b^2$ и $b = \delta a, \delta = \pm 1$. В этом случае получаем четвёрку чисел $(a, \delta a, a, \delta a)$ - решение, когда либо все числа a, b, c, d равны (при $\delta = 1$), либо четвёрку $(a, -a, a, -a)$, когда каждая из сумм $b + c, c + d, d + a, a + b$ равна 0 (при $\delta = -1$).

4. Если $\varepsilon = -1$, то $a(b - a) = b(-a - b) \Leftrightarrow (a + b)^2 = 2a^2 \Leftrightarrow b = (-1 \pm \sqrt{2})a$. В этом случае получаем две четвёрки решений: $(a, (-1 + \sqrt{2})a, -a, (1 - \sqrt{2})a)$ и $(a, (-1 - \sqrt{2})a, -a, (1 + \sqrt{2})a)$. В итоге, система уравнений из условия имеет 8 бесконечных серий решений, получающихся умножением каждого из чисел $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 1), (1, -1, 1, -1), (1, -1 \pm \sqrt{2}, -1, 1 \mp \sqrt{2})$ на любое действительное число.

Критерии оценивания. (●) Угаданы с проверкой первые 5 серий: 1 балл.

(●) Угаданы с проверкой первые 6 серий: 2 балла. (●) Рассуждения пунктов 1, 2 и 3: по 1 баллу. (●) Рассуждения пункта 4: 3 балла.

11.3. Доказать, что для любых трёх положительных действительных чисел x, y, z выполнено неравенство $(x^2 + y^2)^2 \geq (x + y + z)(x - y + z)(x + y - z)(y + z - x)$. Указать все тройки x, y, z , для которых в нём достигается равенство.

Ответ. Все тройки положительных чисел x, y, z , являющихся длинами сторон равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами x, x , то есть тройки $x, x, x\sqrt{2}, x > 0$.

Доказательство. 1. Заметим, что, если x, y, z являются длинами сторон некоторого треугольника, то есть когда каждая из трёх последних скобок произведения в правой части положительна, в правой части ввиду формулы Герона записано число $16S^2$, где S - площадь этого треугольника. Следовательно, в этом случае неравенство из условия эквивалентно неравенству $x^2 + y^2 \geq 4S$, где x, y - длины некоторых двух сторон треугольника. Последнее неравенство следует из того, что $x^2 + y^2 \geq 2xy \geq 4 \cdot \frac{1}{2} xy \cdot \sin \alpha = 4S$, где α - угол между сторонами длин x и y . Заметим, что знак равенства в неравенстве возможен, только когда $x^2 + y^2 = 2xy \Leftrightarrow (x - y)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y$ и $2xy = 4 \cdot \frac{1}{2} xy \cdot \sin \alpha = 4S \Leftrightarrow \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 90^\circ$, то есть когда x, y, z - длины сторон равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами $x, y = x$.

2. Пусть теперь положительные числа x, y, z не являются длинами сторон никакого треугольника, тогда ровно одна из скобок в произведении в правой части не положительна - та, которая соответствует вычитанию наибольшего из этих чисел. Следовательно, в этом случае произведение в правой части неравенства будет не положительно, а выражение в правой - положительно, поэтому неравенство выполняется и в этом случае. При этом $(x^2 + y^2)^2 > 0$ и равенство не достигается.

Критерии оценивания. (●) Доказательство неравенства в случае, когда x, y, z являются длинами сторон некоторого треугольника: 4 балла. (●) Доказательство в случае 2.: 3 балла.

11.4. Неправильный шестиугольник ABCDEF, у которого стороны AB, CD и EF равны, вписан в окружность с центром O, вершины располагаются на окружности по часовой стрелке в алфавитном порядке. Обозначим точку пересечения диагоналей AC и BD за M,

диагоналей CE и DF - за N , а диагоналей AE и BF - за K . Докажите, что треугольники ACE и MNK подобны.

Доказательство. 1. Из равенства сторон AB , CD и EF следует, что треугольник BDF получается из треугольника ACE поворотом относительно O , поэтому данные треугольники равны.

2. В четырёхугольнике $ABMK$ углы KAM и KBM равны, как соответственные углы равных треугольников ACE и BDF , поэтому он является вписанным. Аналогично, вписанными являются и четырёхугольники $MCDN$ и $NEFK$.

3. Обозначим величину угла AKM за x . Четырёхугольник $ABMK$ вписанный, поэтому противоположный AKM угол ABM равен $180^\circ - x$. Четырёхугольник $ABCD$ тоже вписанный (в исходную окружность), поэтому углы $ABM = ABD$ и $ACD = MCD$ равны, как опирающиеся на общую хорду AD , поэтому угол MCD равен $180^\circ - x$. Но и четырёхугольник $MCDN$ вписанный, поэтому в нём угол MND , противоположный углу MCD , равен $180^\circ - (180^\circ - x) = x$. Отсюда следует равенство углов AKM и MND .

4. Обозначим величину угла EKN за y . Четырёхугольник $NEFK$ вписанный, поэтому углы EKN и EFN равны y , как опирающиеся на общую хорду EN . Переходя ко вписанному в исходную окружность четырёхугольнику $CDEF$, получаем равенство y вписанных углов $EFN = EFD$ и ECD , опирающихся на общую хорду ED . Наконец, во вписанном четырёхугольнике $MCDN$ имеем равенство y вписанных углов NMD и $NCD = ECD$, опирающихся на общую хорду ND .

5. Из треугольника NMD следует, что величина угла MDN равна $180^\circ - x - y$. С другой стороны, сумма углов EKN , MKN и AKM равна 180° , и, как мы уже доказали, величины углов AKM и EKN равны x и y соответственно. Следовательно, величина угла MKN одноименного треугольника равна величине угла $MDN = BDF$ треугольника BDF , что равно и углу ACE одноименного треугольника. Аналогично доказываются равенство углов KNM и CAE , и равенство углов KMN и AEC . Следовательно, треугольники ACE и MNK подобны по трём углам., что и требовалось доказать.

Критерии оценивания. (●) Доказана вписанность некоторых или всех четырёхугольников $ABMK$, $MCDN$ и $NEFK$: 2 балла.

11.5. В одной из вершин куба сидят N бабочек, остальные семь вершин пусты. Каждую минуту с одной из вершин куба по одной бабочке перелетают в каждую из трёх соседних с данной по ребру вершин куба, одна – в противоположную (относительно центра) его вершину, и ещё одна – улетает вдаль и больше не возвращается. Найти все значения N , при которых через некоторое время в каждой вершине куба может оказаться одинаковое число бабочек.

Ответ. Любое N , делящееся на 45.

Решение. 1. Покажем, что при любом $N = 45k, k \in \mathbb{N}$ ситуация, когда через некоторое время в каждой вершине может оказаться одинаковое число бабочек, возможна. Занумеруем вершины куба, сначала вершины нижнего основания по часовой стрелке от 1 до 4, затем вершины верхнего основания по часовой стрелке от 5 до 8, так что пятая вершина расположена над первой, шестая над второй и т.д., а все бабочки сначала сидят на первой. Пусть за первые $9k$ минут бабочки перелетают только с первой вершины, после чего на вершинах 2,4,5,7 окажутся по $9k$ бабочек, а остальные вершины будут пусты. За следующие $4k$ минут с каждой из вершин 2,4,5,7 вылетают по k бабочек, после чего уже на каждой вершине куба окажутся по $4k$ бабочек, что и требовалось в условии.

2. Покажем что, если через некоторое время в каждой вершине куба может оказаться одинаковое число бабочек, то N делится на 45. то есть на 5 и 9. Назовём вершины куба 1,3,6,8 *синими*, а вершины 2,4,5,7 – *красными*. Далее за A обозначаем суммарное количество бабочек, сидящих в данный момент в синих вершинах, а за B - суммарное

количество бабочек, сидящих в красных вершинах, сначала $A=N$, $B=0$. Заметим, что каждую минуту из одной из вершин куба перелетает по одной бабочке в каждую из четырёх вершин противоположного цвета, а одна улетает прочь. Всего при этом одно из чисел A и B уменьшается на 5, а второе – увеличивается на 4. следовательно, разность $A-B$ каждую минуту изменяется на 9 в большую или меньшую сторону. В начале процесса $A-B=N$, а в конце, когда на каждой вершине усядутся одинаковые количества бабочек и A станет равным B , разность $A-B=0$. Следовательно, N делится на 9.

Теперь рассмотрим разность M количества бабочек на вершинах 1 и 3.. При перелётах бабочек с красных вершин на каждой из вершин 1 и 3 добавляется по одной бабочке, поэтому M не меняется. При перелётах бабочек с синих вершин либо ровно одно из количеств бабочек в вершинах 1 и 3 уменьшается на 5, либо оба остаются неизменными. В этом случае M каждую минуту изменяется на 5 в большую или меньшую сторону. Сначала M тоже равна N , а в конце нулю, поэтому N должно делиться на 5.

Итак, доказано, что N делится на 5 и 9, то есть делится на 45.

Критерии оценивания. (●) Доказано, что при любом $N = 45k, k \in \mathbb{N}$ ситуация, уравнивания возможна: 3 балла. (●) Доказано, что в случае, когда уравнивание возможно, N делится на 5: 2 балла. (●) Доказано, что в случае, когда уравнивание возможно, N делится на 9: 2 балла.